Examen parcial de Análisis de Variable Compleja.
Cuarto curso de Matemáticas (Metodología).
2 de Marzo de 1996.

1. Sean f y g dos funciones enteras cuya composición es constante. ¿Qué se puede afirmar sobre f y g?.

2. Sean $f,g:\overline{D}(0,1)\to\mathbb{C}$ funciones holomorfas en el disco abierto unidad y continuas en el disco cerrado unidad. Se supone que para $|z|=1$ se verifica que

$$g(z)=\overline{f(z)}$$

   Pruébese que f y g son constantes.

3. Pruébese, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(a,b)=[-a,\, b,\, b+2\pi i,\, -a+2\pi i,\, -a]$ $(a>0, b>0)$, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}\,dx=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}$$

   donde α es un parámetro real y $0<\alpha<1$.

4. Pruébese, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,R)$ $(0<\varepsilon<R)$, que

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{\alpha}}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}$$

   donde α es un parámetro real y $-1<\alpha<1$.

5. Enunciar el principio del máximo para funciones subarmónicas, el principio de extremo para funciones armónicas y el principio del módulo máximo para funciones holomorfas y explicar brevemente cómo se relacionan entre sí.

6. Demostrar el teorema de convergencia de Weierstrass para sucesiones de funciones holomorfas.